

II. *Ueber eine neue Interferenzerscheinung an planparallelen Glasplatten und eine Methode, die Planparallelität solcher Gläser zu prüfen;*
von Otto Lummer.

(Inauguraldissertation.)

(Hierzu Taf. III Fig. 1—3.)

Die Eigenschaft der Natriumflamme, dichromatisch zu sein, benutzte Fizeau¹⁾, um Interferenzen bei grossen Gangunterschieden herzustellen. Bekanntlich sendet das Natriumlicht Strahlen aus, deren Wellenlängen wenig voneinander verschieden sind und genau den beiden *D*-Linien des Sonnenspectrums zukommen. Erzeugt man daher mittelst desselben auf irgend eine Weise Interferenzstreifen, so werden zwei Systeme auftreten, deren Maxima und Minima bei einer gewissen Phasendifferenz der interferirenden Strahlen aufeinanderfallen, und dadurch das Verschwinden des Phänomens herbeiführen können. Seien λ und λ' die den beiden *D*-Linien entsprechenden Wellenlängen, so bestimmt sich dieser Gangunterschied (p), bei welchem die beiden Systeme sich zum ersten mal auslöschen müssen, aus der Gleichung:

1) Fizeau, Ann. de chim. et de phys. (3) 66. p. 429 ff. 1862.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXIII.

$$2p \frac{\lambda}{2} = (2p + 1) \frac{\lambda'}{2};$$

zu $p = 491$, falls für λ und λ' die sowohl von Huggins als Thalén¹⁾ gefundenen Werthe 0,000 589 5 und 0,000 588 9 mm gesetzt werden. Wie leicht einzusehen, muss das Verschwinden der Streifen auch bei einem Gangunterschiede von $3p$, $5p$ etc. Wellenlängen eintreten, während andererseits die beiden Systeme sich verstärken müssen, wenn die Phasendifferenz gleich einem geraden Vielfachen von p ist. Fizeau bestätigte dieses Verschwinden und Wiederkehren der Streifen an dem Newton'schen Farbenglas, dessen beide Theile er mittelst Mikrometerschraube langsam voneinander entfernen konnte. Er beobachtete so in der That bei geeigneter Natriumflamme ein 52maliges periodisches Auftreten der Ringe, woraus hervorgeht, dass die Strahlen noch interferenzfähig, wenn ihr Gangunterschied über 50000 Wellenlängen beträgt, und dass ein Aethertheilchen während nahe $\frac{1}{10\,000\,000\,000}$ Secunde seinen Schwingungszustand ungeändert beibehält. Ob nach dieser Zeit eine Aenderung des Schwingungszustandes eintritt, vermag, wie wir zeigen werden, Fizeau's Versuch aber nicht endgültig zu entscheiden.

Die Luftschicht, welcher bei solch hohen Gangunterschieden der interferirenden Strahlen eine Dicke von ungefähr 15 mm zukam, ersetzte nun Fizeau durch eine Glasplatte, an deren beiden Flächen er Natriumlicht senkrecht reflectiren liess. Er erhielt so Streifen oder Ringe durch die Interferenz der an der vorderen mit den an der hinteren Fläche der Platte gespiegelten Strahlen und benutzte dieselben, um die Aenderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Glas unter dem Einfluss der Wärme zu untersuchen. Nach ihm verdanken diese Interferenzstreifen oder Ringe, welche er hat auftreten sehen, ihre Entstehung einzig und allein der ungleichen Dicke der Platten, und selbst den vollkommensten zu seiner Zeit hergestellten Planparallelgläsern schiebt er solche Unregelmässigkeiten zu,

1) H. Kayser, Lehrbuch der Spectralanalyse, p. 304.

dass sie „Curven gleicher Dicke“¹⁾ zeigen müssen. Im Widerspruch damit steht die von mir beobachtete Interferenzerscheinung. Es tritt dieselbe bei jeder guten Planparallelplatte auf und sie ist es, welche gerade für die Planparallelität der benutzten Platten spricht, indem sie eine Folge derselben ist. Ich muss daher annehmen, dass entweder Fizeau's Glasplatten wenig planparallel waren, oder aber, dass die von ihm gesehenen Interferenzringe mit den an guten Planparallelgläsern auftretenden identisch und von ihm irrthümlicherweise den Unebenheiten der Platten zugeschrieben sind. — Wie dem auch sein möge, aus seinen daraufbezüglichen Worten²⁾ ist ersichtlich, dass er jedenfalls ein Entstehen von Interferenzen auf die im Folgenden erläuterte Weise aus dem Bereich der Möglichkeit ausschloss. Wenigstens lässt er den Fall ganz unberücksichtigt, dass nichtparallele Strahlen, wie sie ja eine Natriumflamme liefert, auf eine absolut planparallele Platte auffallen. Gerade diesen Strahlen verdanken die „Interferenzringe an planparallelen Platten“, auf welche näher einzugehen mir gestattet sei, ihre Entstehung.

Ehe ich zum Thema selbst übergehe, drängt es mich, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geheimr. Prof. v. Helmholtz meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die mir von ihm zu Theil gewordenen Rathschläge sowohl, als für die rege Theilnahme, welche er an dem Verlaufe dieser Arbeit genommen.

Erscheinung.

Das von einer Natriumflamme kommende Licht werde von einem Augenspiegel (ein auf der Convexseite belegter Hohlspiegel mit einer Oeffnung in der Mitte von der Grösse der Pupille) so auf eine gute planparallele Glasplatte ge-

1) Auf die „Interferenzcurven gleicher Dicke“ werden wir später zurückkommen.

2) „Wenn die Platte überall genau gleich dick wäre, würde für parallele Strahlen auch die Interferenz auf der ganzen Oberfläche dieselbe sein: es würden keine Streifen auftreten, sondern es würde höchstens eine Vermehrung oder Verminderung der Intensität des reflectirten Lichtes statthaben. Aber es ist dies bei Planparallelgläsern selten der Fall u. s. w.“

worfen, dass es, von derselben reflectirt, durch die Oeffnung des Augenspiegels nach dem dahinter befindlichen Auge gelange. Ist letzteres auf unendlich accommodirt, so wird es das undeutliche Bild der Oeffnung von einer grossen Anzahl prächtiger, abwechselnd gelber und dunkler Ringe umgeben sehen. Statt des Auges kann ein auf unendliche Entfernung eingestelltes Fernrohr benutzt werden, durch dessen Ocular die in der Brennebene des Objectivs befindlichen Ringe vergrössert gesehen werden. Ferner kann der Hohlspiegel durch einen ebenen, selbst unbelegten Glasspiegel ersetzt werden, welcher die Mitte des Ringsystems zu beobachten und das Auge zu bewegen gestattet. Geschieht letzteres, so wandert auch das Ringsystem; so aber, dass sein Centrum immer im Fusspunkt der vom Auge auf die Platte gefällten Normale zu liegen scheint. Sobald diese Normale nicht mehr das Spiegelbild der Flamme trifft, sind die Kreise des Systems unvollständig, und zwar ist das Flammenbild von Kreistheilen durchzogen, deren concave Seiten nach dem Fusspunkt der Normale zu liegen. Zum Gelingen des Versuches ist eine wenig intensive Lichtquelle nöthig. Man erhält dieselbe dadurch, dass man die an Platindraht angeschmolzene Perle von doppeltkohlensaurem Natron nur an den äussersten Rand der Bunsen'schen Flamme bringt. Am deutlichsten treten die Ringe auf, wenn die Flamme noch dann fortleuchtet, nachdem die Perle längere Zeit in ihr geglüht hat und dann entfernt ist. Dies gilt namentlich für die Erscheinung im durchgehenden Licht. Um in diesem Falle die Ringe zu erhalten, hat man vor allem darauf zu sehen, dass die Platte senkrecht auf der durch sie und die Flamme gehenden optischen Axe des Auges stehe. Diese Einstellung geschieht wohl am besten so: Man lässt die Pupille des durch eine Stearinkerze schwach beleuchteten Auges an der Platte spiegeln und bringt dieses Spiegelbild zur Coincidenz mit der hinter der Platte befindlichen Flamme. Sobald das Auge auf unendlich eingestellt, tritt das Ringsystem inmitten der Natriumflamme auch hier sehr deutlich auf, wiewohl seine Schärfe hinter der des im reflectirten Lichte erzeugten Ringsystems zurückbleibt. Dass auch im durchgehenden

Lichte parallele Strahlen es sind, welche die Erscheinung erzeugen, lässt sich nicht durch Beobachtung mittelst eines auf unendlich eingestellten Fernrohres prüfen; wenigstens ist es mir nicht gelungen, die Ringe durch das Fernrohr zu sehen. Wohl aber vermag ein Auge, welches unfähig ist, auf sehr entfernte Objecte zu accommodiren, darüber Aufschluss zu geben, indem dasselbe in der That erst mit Benutzung eines passenden Concavglases das Phänomen zu entdecken im Stande ist. Erzeugt man das Kreissystem im reflectirten und durchgehenden Licht zu gleicher Zeit übereinander, so verwischen sich die beiden Systeme merklich auf demjenigen Theil der Platte, von welchem sowohl durchgehendes, als vom Augenspiegel auf denselben geworfenes Licht in das Auge gelangt.

Was die Abhängigkeit des Kreissystems von der Entfernung der Platte und Lichtquelle anlangt, so ändert eine Verschiebung der Platte parallel zu sich gar nichts, wohl aber wird das Phänomen beeinflusst durch Stellung und Grösse der Lichtquelle. Je breiter nämlich letztere ist, um so mehr Ringe sind sichtbar, und bei constanter Grösse derselben nimmt die Anzahl zu, je näher, ab, je entfernter die Lichtflamme vom Auge ist. Der Abstand der einzelnen Ringe voneinander bleibt aber derselbe, ob mehr oder weniger Ringe auftreten. Nicht so bei Betrachtung unter immer grösserer Incidenz der Lichtstrahlen. Dreht man das Fernrohr und das Tischchen des Spectrometers¹⁾ mit der darauf befindlichen Platte zu gleicher Zeit so, dass das Licht unter immer grösserem Einfallswinkel auf die Platte und von da in das Fernrohr gelangt, so verschwindet das Centrum der Kreise, und die auftretenden Kreistheile nähern sich schnell geraden Linien, während ihr Abstand voneinander kleiner und kleiner wird. Dieses Verhältniss bleibt, bis der Einfallswinkel des parallel zur optischen Axe des Fernrohres laufenden Strahles eine gewisse Grösse (ungefähr 50°) erreicht hat; von da an nimmt bei wachsender Incidenz der Strahlen

1) Um das Phänomen bequem beobachten und alle vorkommenden Messungen leicht ausführen zu können, befestigte ich die Platte auf dem drehbaren Tischchen eines Spectrometers.

der Abstand zweier Ringe wieder stetig zu. Während dieses Drehens des Fernrohres von 0 bis 90° trifft man aber Stellen, wo das Ringsystem ununterbrochen ist, und keine Streifen auftreten; wir wollen diese Stellen die „neutralen Stellen“ des Systems nennen. Endlich sei noch bemerkt, dass die Interferenzerscheinung immer verschwindet, wenn im reflectirten Licht der dem Auge abgewendeten Fläche der Platte die Reflexionskraft durch Bestreichen mit Asphaltlack genommen wird.

T h e o r i e.

Es sei SF (Fig. 1) die optische Axe der Linse L , deren Brennpunkt in F liege; senkrecht zu ihr stehe die planparallele Platte P . Betrachten wir die Erscheinung zunächst im reflectirten Licht, so sendet ein in S befindlicher leuchtender Punkt Strahlen auf die Platte aus, welche so von derselben reflectirt werden, als ob sie von dem um die Strecke $PS_1 = PS$ hinter der Platte gelegenen Punkt S_1 kämen. Die Linse möge dieselben im Punkte σ_1 vereinigen. Jeder Strahl S_1A erleidet aber bei A eine Brechung nach B , wird dort reflectirt und tritt bei C parallel dem bei A direct gespiegelten Strahle wieder aus; von den bei C nach dem Innern der Platte gehenden Strahlen sehen wir ihrer geringen Intensität wegen ab. Solange der Einfallswinkel der Strahlen klein genug, kann man annehmen, dass alle von der hinteren Fläche der Platte herrührenden Strahlen von einem Punkt S_2 kommen, welcher um eine von der Dicke und dem Brechungswinkel der Platte abhängende Strecke von S_1 entfernt ist. Die scheinbar von S_2 ausgehenden Strahlen mögen durch die Linse in σ_2 vereinigt werden. Gemäss der Theorie der Linsen liegt σ_1 weiter von L entfernt als σ_2 ; es müssen sich demnach die von der Linse nach den beiden Bildpunkten gelangenden Strahlen schneiden, und zwar, da zwischen der Brennebene und der Linse keine irgend wie auf die Linse auffallenden Strahlen vereinigt werden, innerhalb eines Kegels, dessen Horizontaldurchschnitt das Dreieck $z_1\sigma_2z_2$ ist. Alle von S ausgehenden Strahlen sind zu einander coherärent; daraus folgt, dass die scheinbar von S_1 und S_2

kommenden Strahlen sich in ihren Schnittpunkten je nach der Grösse ihrer Gangunterschiede verstärken oder schwächen müssen. In jedem Schnittpunkt treffen nur zwei Strahlen zusammen, von denen der eine an der vorderen, der andere an der hinteren Fläche der Platte gespiegelt worden ist. Wir wollen die Phasendifferenz zweier solcher Strahlen in ihrem Schnittpunkte aufsuchen. Es ist dieselbe gleich dem Unterschiede ihrer optischen Längen, wenn unter optischer Länge eines Strahles mit v. Helmholtz¹⁾ die Summe derjenigen Längen bezeichnet wird, welche der Strahl in den verschiedenen Medien zurücklegt, jede solche Länge multiplicirt mit dem Brechungsexponenten des von ihr durchlaufenen Mediums. Bei dieser Definition gilt dann der wichtige Satz²⁾ „Wenn Lichtstrahlen von einem Punkte ausgegangen und durch beliebig viele Flächen von continuirlicher Krümmung gebrochen worden sind, stehen sie nach der letzten Brechung senkrecht auf jeder krummen Fläche, für deren sämmtliche Punkte die optische Länge eines Strahles einen constanten Werth hat.“ Um demnach die Phasendifferenz des beliebigen Strahlenpaares SEL_3m und $SABCL_2m$ zu berechnen, betrachten wir die von m ausgehenden Strahlen mL_3 und mL_2 , welche sich in dem Bildpunkt V schneiden mögen, falls die Platte nicht da wäre, und beschreiben um V als Mittelpunkt eine Kugelfläche mit dem Radius VC ; schneidet diese Fläche den Strahl VL_3 in G , so sind nach dem oben angeführten Satze die optischen Längen der Strahlen mL_3G und mL_2C einander gleich. Demnach wird, wenn n der Brechungsindex der Glasplatte und λ die Wellenlänge des Lichtes, die Phasendifferenz (Δ) des betrachteten Strahlenpaares:

$$\Delta = SA + 2nAB - (SE + EG) - \frac{\lambda}{2},$$

wo die Verzögerung von einer halben Wellenlänge durch die ungleiche Reflexion der beiden interferirenden Strahlen bedingt wird. Sei H der Fusspunkt des von E auf den Strahl SA gefällten Lothes, dann wollen wir setzen: $SE = SH$

1) v. Helmholtz, wissenschaftl. Abhandl. 2. p. 148.

2) v. Helmholtz, l. c. p. 153.

und ferner den Winkel EGC als einen rechten betrachten. Dadurch wird Δ angenähert:

$$\Delta = HA + 2AB \cdot n - CE \cdot \sin ECG - \frac{\lambda}{2},$$

und wenn noch die Einfallswinkel und Brechungswinkel der Strahlen SE und SA bezüglich mit e_1, e_2, b_1, b_2 , die Dicke der Platte mit d und die Strecke PS mit E bezeichnet werden, mit Uebergang der leicht auszuführenden Zwischenrechnungen schliesslich:

$$\Delta = 2d \operatorname{tg} b_2 \cos e_1 - \frac{2nd}{\cos b_2} - E(\sin e_2 - \sin e_1)^2 - \frac{\lambda}{2}.$$

In dieser Gleichung ist E, d und n als constant anzusehen; es hängt demnach die Phasendifferenz in m nur ab von den Einfallswinkeln der Einzelstrahlen des in m sich schneidenden Strahlenpaares. Von diesen letzteren bilden diejenigen eine besondere Classe, deren Einzelstrahlen einander parallel laufen. Es entstehen dieselben aus nur je einem von S ausgehenden Strahl. Betrachten wir das Strahlenpaar, in welches sich der Strahl SA spaltet; es ist dasselbe gebildet von den Strahlen $SA l_1 z_2$ und $SABCl_2 z_2$, und die Phasendifferenz in z_2 finden wir aus der für Δ aufgestellten Gleichung, indem wir darin $e_1 = e_2 = e$ und $b_1 = b_2 = b$ setzen. Wir erhalten dadurch:

$$\Delta = 2d \operatorname{tg} b \cos e - \frac{2nd}{\cos b} - \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 e} - \frac{\lambda}{2}.$$

Diese Gleichung zeichnet sich vor allem dadurch aus, dass in ihr nur n, d und e , nicht aber E , der Abstand des leuchtenden Punktes vorkommt. Ferner aber gilt sie auch ohne jede Vernachlässigung, insofern die Wellenfläche (hier die Kugelfläche) für parallele Strahlen in der That eine zu denselben senkrecht stehende Ebene ist.

Wie wir gesehen, hängt die Phasendifferenz in einem beliebigen Schnittpunkte eines Strahlenpaares lediglich ab von den Einfallswinkeln der Einzelstrahlen dieses Paares. Nehmen wir also an, es brächten die nach m und z_2 kommenden Strahlen Dunkelheit hervor, so entsprächen diesen dunklen Punkten in der Ebene zwei dunkle Kreise im Raume, welche von den Punkten m und z_2 bei einer Rotation der

Fig. 1 um die optische Axe der Linse L beschrieben werden. Es werden also, wenn überhaupt Interferenzen auftreten, in den senkrecht auf $F\sigma_2$ errichteten Ebenen Kreise entstehen müssen.

In der Wirklichkeit haben wir es nun aber nicht mit leuchtenden Punkten, sondern mit Lichtflammen zu thun, welche aus unendlich vielen Lichtpunkten bestehend gedacht werden müssen. Es fragt sich, ob bei Anwendung einer ausgedehnten Lichtquelle noch dasselbe Resultat gilt, wie für einen einzigen leuchtenden Punkt? Um diese Frage beantworten zu können, betrachten wir zunächst den Fall, dass eine parallel zur Platte stehende leuchtende Fläche vorhanden sei. Der senkrechte Abstand derselben sei wieder E .

Wie von S , so kommen von jedem leuchtenden Punkte dieser Fläche unendlich viele Strahlenpaare nach der Linse. Es entspricht demnach jedem leuchtenden Punkte ein von der durch F gelegten Brennebene nach der Linse zu begrenzter Raum, innerhalb dessen alle die Schnittpunkte der von ihm herrührenden Strahlenpaare gelegen sind. Dabei werden die benachbarten leuchtenden Punkten der Lichtfläche zukommenden Schnitträume theilweise übereinanderfallen, und infolge dessen sich in einem Punkte z_2 und m eine grosse Menge Strahlenpaare zu gleicher Zeit schneiden. Soviel aber auch Strahlenpaare nach einem Punkte gelangen mögen, so werden sie alle von verschiedenen leuchtenden Punkten herrühren, und daher nur die Strahlen eines jeden Paares, nicht aber Strahlen verschiedener Paare miteinander interferiren können. Da, wo sich demnach Strahlenpaare von allen möglichen, merklich voneinander verschiedenen Gangunterschieden schneiden, muss infolge der Summation der verschiedenen Intensitäten das Interferenzphänomen verschwinden, während sich die Wirkung eines einzigen Strahlenpaares so oft vervielfachen wird, als in dem Punkte Strahlenpaare von ganz derselben Phasendifferenz zusammentreffen. Da der Abstand E für jeden Lichtpunkt derselbe, so bringen nach dem früher Gesagten nur solche Strahlenpaare, für welche e_1 und e_2 dieselben Werthe haben, in ihrem Schnittpunkte dieselbe Helligkeit hervor. Sehen wir zu, ob Strahlen-

paare von dieser Eigenschaft sich in ein- und demselben Punkte, und in was für Punkten sich dieselben schneiden können. Es ist bekannt, dass alle vor der Linse einander parallel laufenden Strahlen in einem Punkte der Brennebene vereinigt werden. Daraus folgt von selbst, dass sich in einem Punkte wie m nur Strahlenpaare treffen können, deren sämtliche Strahlen unter voneinander verschiedener Richtung nach der Linse gegangen sind; deren Gangunterschiede somit voneinander verschieden. Eine vertical auf der Axe stehende leuchtende Fläche bringt also in allen ausser der Brennebene gelegenen Punkten m , nach welchen überhaupt Strahlen gelangen, gleichmässige Helligkeit hervor. Dies gilt von jeder der Platte parallelen Lichtfläche, sodass bei Anwendung einer aus unendlich vielen solchen Lichtebenen bestehenden Lichtquelle das Interferenzphänomen in den ausserhalb der Brennebene gelegenen Punkten verschwinden muss.

Anders gestaltet sich das Resultat für Punkte der Brennebene. In einem solchen Punkte vereinigen sich Strahlenpaare für welche $e_1 = e_2 = e$ ist; alle von der ebenen Lichtfläche und gemäss der Eigenschaft der Phasendifferenz eines von parallelen Strahlen gebildeten Strahlenpaares, unabhängig von der Entfernung des Lichtpunktes zu sein, alle überhaupt von der Flamme parallel ausgehenden Strahlen erzeugen daher Strahlenpaare, welche sich sowohl in einem und demselben Punkte der Brennebene schneiden, als auch dort ganz die nämliche Helligkeit hervorrufen. Der Schnittpunkt liegt auf der den Strahlen parallel gezogenen Nebenaxe der Linse. In der Wirklichkeit, wo man es immer mit einer ausgedehnten Lichtquelle zu thun hat, wird man daher nur mittelst der auf die Brennebene der Linse L eingestellten Lupe Ringe wahrnehmen können; da Linse (L) und Lupe zusammen ein Fernrohr ausmachen, so ist damit bewiesen, dass nur durch das auf unendlich eingestellte Fernrohr die Ringe zu sehen sind. Das Centrum des Ringsystems ist dann identisch mit dem Hauptbrennpunkt des Objectivs. Bei Betrachtung mit dem blossen Auge aber muss dasselbe auf unendlich accommodirt sein, d. h. seine Netzhaut muss sich in der Brenn-

ebene der Augenlinse befinden, wenn es die Kreise wahrnehmen soll; für die Lage des Centrums gilt dasselbe, wie vorher.

Da, wie leicht einzusehen, für die Interferenzerscheinung im durchgehenden Licht ganz dasselbe gelten muss, so wollen wir dabei nicht länger verweilen. Nur auf eins sei hingewiesen: dass nämlich die interferirenden Strahlen eines Strahlenpaares infolge der vorkommenden Reflexionen keine Verzögerung erleiden wie im reflectirten Licht, insofern dieselben nur am dünneren Medium gespiegelt werden. Die Phasendifferenz in einem Punkte der im durchgehenden Lichte erzeugten Erscheinung ist daher:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 e};$$

wenn e der Winkel ist, den die nach diesem Punkte gezogene Nebenaxe mit der optischen Axe der Linse einschliesst.

Wir wollen annehmen, es sei λ die Wellenlänge des Natriumlichtes in Luft. Dann gibt uns also Δ an, um wie viele Wellenlängen λ die in einem Punkte eines Kreises zusammentreffenden Strahlen eines Strahlenpaares verzögert sind. Nach dem Interferenzprincip von Thomas Young ist daher in einem Punkte der Brennebene ein Maximum oder Minimum der Intensität, je nachdem das ihm entsprechende Δ ein gerades oder ungerades Vielfaches von $\lambda/2$ ist. Vorerst geht daraus hervor, dass die im reflectirten und durchgehenden Licht entstehenden Ringe complementär zu einander sind. Dass dieselben, wenn gleichzeitig übereinander erzeugt, sich nicht gänzlich zerstören, liegt an der verschiedenen Intensität der Minima im durchgehenden und reflectirten Licht. Bekanntlich ist die Reflexion des Lichtes zwischen Glas und Luft mit bedeutend grösserem Intensitätsverlust verbunden, als eine Brechung, sodass bei senkrechter Incidenz der Strahlen nur ein kleiner Bruchtheil des auffallenden Lichtes zurückgeworfen wird. Betrachten wir nun die Ringe im reflectirten Licht; es werden dieselben von Strahlen gebildet, von denen der eine zwei Brechungen mehr hat als der andere, während aber beide je eine Reflexion erlitten haben; die interferirenden Strahlen sind demnach

beinahe gleich intensiv, und die Minima fast 0. Im durchgehenden Licht hingegen hat der eine Strahl zwei Reflexionen mehr denn der andere; die Interferenz wird nur eine sehr unvollkommene sein, und die Minima an Helligkeit den Maximis nicht viel nachstehen. Trotzdem ist das Ringsystem überraschend deutlich, sodass sich hier also die Summation der Wirkungen der einzelnen Strahlenpaare in einem Punkte der Erscheinung ausserordentlich geltend macht. Es wurde dieses Factum noch auf andere Weise dadurch bestätigt, dass man Licht an einer Glasplatte reflectiren liess, deren Rückseite mit Silber belegt war. Auch in diesem Falle traten die Ringe deutlicher auf, als nach der ungleichen Intensität der interferirenden Strahlen zu erwarten war. Wie man diese Thatsache benutzen kann, um die Phasenänderung des Lichtes bei Reflexion zwischen Glas und verschiedenen Metallen oder anderen Stoffen zu erkennen, ergibt sich von selbst.¹⁾

Kehren wir zurück zu den Ringen an einer unbelegten Glasplatte. Das Centrum derselben wird von den senkrecht durch die Platte gegangenen Strahlen gebildet, deren Einfallswinkel $e = 0$, und deren Gangunterschied demnach gleich $2nd$ ist. Sei:

$$q \frac{\lambda}{2} = 2nd$$

und q eine ganze Zahl; dann ist q die überhaupt grösstmögliche Anzahl der halben Wellenlängen, um welche bei einer und derselben Platte zwei interferirende Strahlen gegen einander verzögert sein können. Es folgt dies aus der Gleichung für den Gangunterschied Δ , welche unmittelbar erkennen lässt, dass Δ mit wachsendem Einfallswinkel (e) stetig abnimmt. Danach muss also bei Berücksichtigung des Interferenzgesetzes der Gangunterschied von einem Ring zum benachbarten Ring höherer Ordnung um $\lambda/2$ abnehmen. Betrachten wir daher die Mitte des Kreissystems als nullten, den darauf folgenden hellen oder dunklen Kreis als ersten, den nächsten als zweiten Kreis u. s. w., so berechnet sich der Winkel e_i , welchen die den i . Kreis bildenden Strahlen, oder

1) Siehe meine Dissertation.

was dasselbe, welchen die diesen Kreis treffenden Nebenaxen mit der Hauptaxe einschliessen (wir wollen e_i fortan den Distanzwinkel des i . Kreises nennen), aus der folgenden Gleichung:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 e_i} = (q - i)\frac{\lambda}{2},$$

welche sich einfacher gestaltet, wenn für q sein obiger Werth eingesetzt wird, und beide Seiten aufs Quadrat erhoben werden.

Wir erhalten dann:

$$\sin^2 e_i = \frac{n\lambda}{2d}i - \frac{i^2\lambda^2}{16d^2} \text{ und}$$

$$(\alpha) \quad \sin^2 e_i = ci - i^2 \frac{\lambda^2}{16d^2},$$

wenn wir mit c die jeder Platte als Constante zugehörige Grösse $n\lambda/2d$ bezeichnen. Solange i klein, wird in der Gleichung (α) das zweite Glied gegen das erste auf der rechten Seite vernachlässigt werden können. Es ist dies nicht mehr erlaubt, wenn i einen beträchtlichen Werth hat, da für $i = 74000$ sogar $i^2\lambda^2/16d^2 = n\lambda i/2d$ wird. Beschränken wir uns aber vorläufig auf die Betrachtung der ersten Ringe, für welche $i = 0, 1, 2, 3 \dots$, so können wir obige Formel (α), ohne einen merklichen Fehler zu begehen, in folgender einfachen Form schreiben:

$$\sin^2 e_i = ic, \quad c = \frac{n\lambda}{2d};$$

Es entspricht nun, falls die Mitte des Kreissystemes hell, $(q - 1)\lambda/2$ dem ersten Ring, welcher dunkel, $(q - 2)\lambda/2$ dem zweiten Ring, welcher hell, kurz alle ungeraden Werthe von i kommen den dunklen, alle geraden Werthe von i den hellen Kreisen zu; das Verhältniss verwandelt sich in das umgekehrte, wenn die Mitte dunkel ist, sodass unsere letzte Gleichung aussagt: „Ist q eine ganze Zahl, so verhalten sich die Sinusquadrate der Distanzwinkel der mit der Mitte gleiche oder ungleiche Helligkeit besitzenden Ringe wie die geraden, resp. ungeraden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe.“ Bei den meisten Glasplatten dürfte aber die über q gemachte Bedingung nicht erfüllt sein, und darum eignet sich dieses Gesetz wenig zur Prüfung unserer Theorie.

Wir betrachten daher den Fall, dass:

$$q = q_1 + \delta, \text{ wo } 0 < \delta < 1$$

und q eine ganze Zahl bedeute. Diese Gleichung sagt aus, dass das Centrum des Ringsystems weder ein Minimum noch ein Maximum ist; nichtsdestoweniger möge die Mitte wieder als nullter, das darauf folgende Maximum oder Minimum als erster Kreis u. s. w. bezeichnet werden. Dann entspricht dem ersten Ring eine Phasendifferenz von q_1 halben Wellenlängen, und für den Distanzwinkel des i . Ringes muss gelten:

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 e_i} = (q_1 - i + 1) \frac{\lambda}{2},$$

$$\text{also: } 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 e_i} = (q_1 + \delta) \frac{\lambda}{2} - (\delta + i - 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{und: } 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 e_i} = 2nd - (\delta + i - 1) \frac{\lambda}{2},$$

wenn für $q_1 + \delta$ sein Werth $4nd/\lambda$ eingesetzt wird. Wir quadrieren wieder die letzte der Gleichungen und erhalten so:

$$\sin^2 e_i = \frac{n\lambda}{2d} (\delta + i - 1) - \frac{\lambda^2}{16d^2} (\delta + i - 1)^2,$$

welche Gleichung für kleine Werthe des i wird:

$$\sin^2 e_i = c (\delta + i - 1), \quad c = \frac{n\lambda}{2d};$$

und für $\delta = 1$ in die früher abgeleitete, für ganzzahlige q geltende Gleichung übergeht, wie es der Fall sein muss. Für die Distanzwinkel zweier ganz beliebiger Ringe i und $i + \nu$ haben wir somit die beiden Gleichungen gefunden:

$$(1) \quad \sin^2 e_i = c (\delta + i - 1),$$

$$(2) \quad \sin^2 e_{i+\nu} = c (\delta + i + \nu - 1),$$

aus denen sich folgende Relationen ableiten lassen:

$$(3) \quad c = \frac{n\lambda}{2d} = \frac{\sin^2 e_{i+\nu} - \sin^2 e_i}{\nu},$$

$$(4) \quad \frac{n\lambda}{2d} \delta = \frac{(i + \nu - 1) \sin^2 e_i - (i - 1) \sin^2 e_{i+\nu}}{\nu},$$

$$(5) \quad \delta = \frac{(i + \nu - 1) \sin^2 e_i - (i - 1) \sin^2 e_{i+\nu}}{\sin^2 e_{i+\nu} - \sin^2 e_i},$$

$$(6) \quad \delta + i - 1 = \frac{\nu \cdot \sin^2 e_i}{\sin^2 e_{i+\nu} - \sin^2 e_i},$$

die uns einestheils gestatten, unsere Theorie zu prüfen, und anderentheils über Dinge Aufschluss zu geben im Stande sind, welche bei gewisser Anordnung des Versuches durch das Experiment nicht bestimmt werden können. Was das erstere anbetrifft, so nehmen wir an, wir hätten die Winkel e_i und $e_{i+\nu}$ auf irgend eine Weise bestimmt; die Formeln (3) und (4) erlauben dann die Werthe c und $n\lambda\delta/2d$ zu berechnen, vermittelst deren wir nach Formel (1) die Distanzwinkel e_i für eine beliebige Ordnungszahl i finden können. Haben wir demnach alle Distanzwinkel der Ringe 1 bis ν beobachtet, so können wir aus zweien derselben alle anderen berechnen und mit den beobachteten vergleichen. Die Winkel e_i sind aber leicht auf folgende Weise durch Beobachtung zu finden. Das im reflectirten Licht erzeugte Ringsystem werde durch das Fernrohr eines Spectrometers betrachtet, auf dessen Tischchen die planparallele Platte senkrecht zur Drehebene des Fernrohres gestellt ist. Ist das letztere mit einem Fadenkreuz versehen, dessen Schnittpunkt im Focus des Objectivs sich befindet, so stellen wir erst das Fernrohr mittelst Gauss'schen Oculars senkrecht zur Platte und drehen dann dasselbe, bis sein Fadenkreuzschnittpunkt mit irgend einem Ringe coincidirt; der Drehungswinkel, welcher an dem Theilkreis des Spectrometers abgelesen werden kann, ist der gesuchte Distanzwinkel des betreffenden Ringes. Es folgt dies zur Genüge aus dem bisher Gesagten. Eine genauere und controlirende Messung der Winkel e_i erhalten wir dadurch, dass wir das Fernrohr nacheinander auf die beiden Schnittpunkte einstellen, in welchen jeder Kreis von der durch das Centrum gehenden, auf der Platte senkrecht stehenden Drehungsebene des Fernrohres geschnitten wird. Es ist dann der Drehungswinkel der doppelte Winkel e_i , wenn auf den i . Winkel eingestellt worden. Die Mitte der beiden Einstellungen aber gibt uns den Ort des Centrums des Ringsystemes, den wir durch directe senkrechte Stellung des Fernrohres zur Platte ermitteln können. Auf wieviel Kreise wir auch einstellen mögen, immer muss daraus derselbe Werth für den Ort des Centrums sich ergeben, vorausgesetzt, dass die Ringe mathematische Kreise

und die Ablesungsfehler unendlich klein. Bei den weiter unten mitgetheilten Beobachtungen lagen die aus den verschiedenen Ringeinstellungen gewonnenen Resultate für den Ort des Centrums noch innerhalb der möglichen Beobachtungsfehler. Es wurden die Messungen ausgeführt an einer Platte, deren Dicke $d = 4,43$, und deren Brechungsexponent $n = 1,53$ gefunden waren; der Theilkreis des Spectrometers erlaubte, bis auf $10''$ abzulesen. Als Augenspiegel diente eine planparallele unbelegte Glasplatte, sodass das Centrum deutlich gesehen und die Nummer eines jeden Ringes gezählt werden konnte. Das Centrum war dunkel, und der erste Ring entsprach einem Maximum, der zweite einem Minimum u. s. w. Da die Einstellungen auf die hellen Ringe zu unsicher sind, so wurden die Distanzwinkel nur für die dunklen Kreise gemessen, von denen e_1 und e_{26} der Berechnung aller übrigen zu Grunde gelegt worden sind. In der folgenden Tabelle finden wir die so berechneten Werthe der e unter „berechnet“, die gemessenen unter „beobachtet“.

Die letzte Verticalreihe gibt die Differenzen beider an, während aus der ersten die Ordnungszahl eines Ringes zu ersehen ist.

Tabelle I.

e_1	berechnet	beobachtet	Differenz
e_2	$-^0 47' 59,4''$	$-^0 48' 10''$	$-10,6'$
e_4	—	1 8 55	—
e_6	1 24 50	1 25 20	$-30,0''$
e_8	1 38 12,1	1 38 35	$-22,9$
e_{10}	1 49 57,6	1 50 5	$-7,4$
e_{12}	2 — 34,8	2 — 40	$-5,2$
e_{14}	2 10 20	2 10 20	$+0,0$
e_{16}	2 19 24,7	2 19 15	$+9,7$
e_{18}	2 27 56,1	2 28 —	$-3,9$
e_{20}	2 35 59,8	2 36 10	$-10,2$
e_{22}	2 43 39,4	2 44 —	$-20,6$
e_{44}	2 50 58,7	2 51 5	$-6,3$
e_{26}	—	2 58 —	—

Aus den Differenzen der vierten Columnne geht hervor, dass die Uebereinstimmung der Theorie mit der Beobachtung eine vollkommen befriedigende ist. Wenn an Stelle

der Winkel e_4 und e_{26} andere der Berechnung zu Grunde gelegt werden, werden auch die berechneten Winkel andere sein; aber selbst in dem ungünstigsten Falle, dass die Winkel e_2 und e_4 benutzt werden, ergeben sich Differenzen, welche innerhalb 13 und 40" schwanken.

Aus den beiden gefundenen Grössen:

$$c = \frac{n\lambda}{2d} = 0,000\,103\,486 \quad \text{und} \quad \frac{n\lambda\delta}{2d} = 0,000\,913\,777$$

ergibt sich nun unmittelbar $\delta = 0,883$, und wir schliessen daraus, dass in unserem Falle die Mitte beinahe einem Maximum entspricht. Wäre $\delta = 1$, dann müsste das früher aufgestellte Verhältniss für die Distanzwinkel erfüllt sein; es müssten sich also, da die Mitte schwarz, die Sinusquadrate der Distanzwinkel der dunklen Ringe verhalten wie die geraden Zahlen. Inwieweit dies bei unserem Beispiel der Fall, lehrt die folgende Nebeneinanderstellung der Quotienten $\sin e_{i+2}/\sin e_i$ und $\sqrt{i+2}/\sqrt{i}$, welche einander gleich sein müssen, falls $\delta = 1$ ist.

Tabelle II.

i	$\frac{\sin e_{i+2}}{\sin e_i}$	$\frac{\sqrt{i+2}}{\sqrt{i}}$	Differenz	i	$\frac{\sin e_{i+2}}{\sin e_i}$	$\frac{\sqrt{i+2}}{\sqrt{i}}$	Differenz
2	1,4307	1,4140	0,0167	14	1,0684	1,0690	0,0006
4	1,2382	1,2249	0,0133	16	1,0628	1,0606	0,0022
6	1,1552	1,1547	0,0005	18	1,0551	1,0541	0,0010
8	1,1166	1,1180	0,0014	20	1,0501	1,0484	0,0017
10	1,0961	1,0952	0,0009	22	1,0431	1,0446	0,0013
12	1,0801	1,0800	0,0001	24	1,0404	1,0406	0,0002

Die sehr kleinen Differenzen legen die Vermuthung nahe, dass δ noch grösser als 0,883 sein muss. Auch dieses δ variirt mit den Winkeln, welche zur Berechnung der oben angegebenen Constanten benutzt werden. Direct und leichter erhalten wir dasselbe durch die Gleichung (6). Dieselbe ist aber noch in anderer Beziehung wichtig, da sie es ist, welche die Ordnungszahl eines Ringes zu bestimmen erlaubt, und die Helligkeit des Centrums kennen lehrt, wenn letzteres nicht durch das Experiment geschehen kann.¹⁾

1) Es ist dies z. B. der Fall bei Anwendung eines auf der Rückseite
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXIII

Es ist diese Gleichung:

$$\delta + i - 1 = \frac{\nu \cdot \sin^2 e_i}{\sin^2 e_{i+\nu} - \sin^2 e_i};$$

in derselben kommen rechts nur die Distanzwinkel zweier beliebiger Ringe i und $i + \nu$, die Differenz ihrer Ordnungszahlen, nicht aber i selbst vor. Können wir demnach e_i und $e_{i+\nu}$ beobachten, dann liefert uns obige Gleichung $\delta + i$ und damit i und δ ; denn wenn $\delta + i$ eine gemischte Zahl, so ist i gleich der darin enthaltenen ganzen Zahl und δ gleich dem übrigbleibenden Bruche; wenn hingegen i eine ganze Zahl, so ist $\delta = 1$ und i gleich der um Eins verminderten Zahl. In beiden Fällen aber die Mitte mit dem i . Ring gleich oder entgegengesetzt gefärbt (womit der Helligkeitsgrad bezeichnet werde), je nachdem i gerade oder ungerade. Die Richtigkeit dieser Resultate geht am besten aus den folgenden Beispielen hervor, welchen die in Tabelle I angeführten Werthe zu Grunde gelegt sind:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} e_2 = 48' 10''; & e_6 = 1^\circ 25' 20; & \nu = 4, \\ \delta + i - 1 = \frac{4 \cdot \sin^2 48' 10''}{\sin^2 1^\circ 25' - \sin^2 48' 10''} = 1,87, \\ \delta + i = 2,87; & i = 2 \text{ also } i + \nu = 6; & \delta = 0,87. \end{cases} \\ (2) \quad & \begin{cases} e_{14} = 2^\circ 10' 20''; & e_{26} = 2^\circ 58'; & \nu = 12; \\ \delta + i - 1 = \frac{12 \cdot \sin^2 e_{14}}{\sin^2 e_{26} - \sin^2 e_{14}} = 13,882; & i = 14; & \delta = 0,882. \end{cases} \\ (3) \quad & \begin{cases} e_{18} = 2^\circ 28'; & e_{26} = 2^\circ 58'; & \nu = 8, \\ \delta + i - 1 = \frac{8 \cdot \sin^2 e_{18}}{\sin^2 e_{26} - \sin^2 e_{18}} = 17,93; & i = 18; & \delta = 0,93. \end{cases} \end{aligned}$$

Wie wir wissen, beziehen sich die benutzten Winkel e auf dunkle Ringe; unsere Beispiele lehren also alle, dass, da i stets gerade, die Mitte des Ringsystems dunkel, wie es in der That der Fall. Auch die für δ bestimmten Werthe nähern sich dem früher berechneten in überraschender Weise.

Verweilen wir vorläufig noch bei senkrechter Incidenz, wo also die normal durch die Platte gehenden Strahlen der optischen Axe parallel laufen, und fragen uns, von welchen Grössen die Anzahl der auftretenden Ringe abhängt.

belegten Augenspiegels, dessen Oeffnung verhindert, dass die das Centrum bildenden Normalstrahlen in das Auge gelangen.

Es sei SS_1 (Fig. 2) der Horizontalschnitt einer leuchtenden Kreisfläche mit der Ebene der Zeichnung: durch den Mittelpunkt M dieser Lichtfläche gehe die optische Axe der Augenlinse L , deren Brennpunkt in F liege; senkrecht zur Axe stehe die planparallele Platte P . Sehen wir von der Platte ab, dann möge die Linse L von SS_1 das Bild ss_1 erzeugen, sodass der Lichtkegel S_1l_1 nach s_1 und von S der Lichtkegel Sl_1 nach s gelangt. Die anderen von S und S_1 ausgehenden Strahlen kommen der Kleinheit der Pupille (deren Durchmesser ll_1 ist) wegen nicht in das Auge. Also nur innerhalb des Raumes Sl_1S_1 verlaufende Strahlen tragen zur Erscheinung bei, welche mittelst der in F befindlichen Netzhaut wahrgenommen wird; es wird daher, wie wir später zu benutzen haben werden, ein Minimum der Plattenfläche von den Strahlen durchsetzt, wenn die Platte nahe dem Auge steht. Eine parallele Verschiebung der Platte zu sich selbst bringt dabei durchaus keine Aenderung des Ringsystems hervor, da ja die Phasendifferenz eines Strahlenpaares lediglich von der Richtung des einfallenden Strahles abhängt, und dieser Einfallswinkel von der Stellung der Platte wohl, nicht aber von der Entfernung PM abhängig ist. Anders verhält es sich damit in Bezug auf die Entfernung und Grösse der leuchtenden Fläche SS_1 . Da der Distanzwinkel eines Ringes um so grösser, je höher die Ordnungszahl desselben, und der Distanzwinkel nichts anderes ist, als der Einfallswinkel der diesen Ring bildenden Strahlen, so folgt, dass um so mehr Ringe auftreten müssen, unter je grösserem Einfallswinkel noch Strahlen in das Auge gelangen. Wenn l_2 der Fusspunkt des von S_1 auf die Verbindungslinie ll_1 oder deren Verlängerung gefällten Lothes ist, dann finden wir den Einfallswinkel e des Strahles (Sl_1) aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} e = \frac{lL + Ll_2}{S_1l_2} - \frac{R + r}{E};$$

wenn wir mit R den Radius der Pupille, mit r den senkrechten Abstand des entferntesten Lichtpunktes von der Axe und mit E die Entfernung ML bezeichnen. Es ist e , der Distanzwinkel des Ringes von der höchsten Ordnung, zugleich der Distanzwinkel des von der Lichtfläche auf der

Netzhaut infolge der Accommodation des Auges auf unendlich entstehenden Zerstreuungskreises. Unsere Gleichung sagt aus, dass e und damit die Anzahl der auftretenden Ringe zunimmt mit der Grösse der Lichtquelle und dem Radius der Pupille, abnimmt dagegen, wenn die Flamme von dem Auge wegrückt. Aus der Fig. 2 folgt noch ein anderes interessantes Resultat. Wie leicht zu erkennen, schneidet sich in dem letzten Ring nur ein Strahlenpaar, in dem Punkte F und in allen überhaupt zwischen p und p_1 gelegenen Punkten dagegen ein Strahlencomplex, dessen Querschnitt parallel zur Platte die Oeffnung der Pupille zur Grösse hat. Abgesehen davon, dass die Helligkeit an verschiedenen Stellen des Ringsystems verschieden, variirt also auch die Deutlichkeit des Phänomens mit der Grösse der Pupille, und zwar so, dass erstere zunimmt, wenn letztere wächst. Es ist somit der Umstand, dass eine wenig intensive Lichtquelle angewendet werden muss, um die Erscheinung hervorzurufen, zugleich äussert günstig für die Schärfe und Deutlichkeit der Ringe, insofern ja die Pupille sich erweitert, je schwächer das ins Auge dringende Licht ist.

Bisher haben wir immer angenommen, dass die Platte senkrecht zur Axe der Linse stehe, und gefunden, dass alle für diesen Fall abgeleiteten Resultate mit der Beobachtung im Einklang stehen. Es bleibt uns jetzt noch zu beweisen übrig, inwiefern die Gestalt der Interferenzcurven und der Abstand zweier derselben sich ändert, wenn unter immer grösserer Incidenz der Lichtstrahlen beobachtet wird. Dazu betrachten wir die Ringe im durchgehenden Licht. Alle normal zur Platte gerichteten Strahlen vereinigen sich bei Senkrechtheilung des Fernrohrs zur Platte im Hauptbrennpunkt der Linse. Dasselbe gilt bei Betrachtung mittelst des Auges. Wird demnach die Platte nach einer Seite gedreht, so schliessen die Normalstrahlen, welche das Centrum der Erscheinung bilden, einen dem Drehungswinkel gleich grossen Winkel mit der optischen Axe der Linse ein und vereinigen sich in einem seitlich von dem Focus der Linse gelegenen Punkte; der Distanzwinkel des Centrums der Ringe wächst proportional dem Drehungswinkel der Platte. Gelangen

die Normalstrahlen nicht mehr in das Auge, so ist die eine Hälfte mit dem Centrum ganz verschwunden, und es sind nur noch Kreistheile sichtbar, welche sich geraden Linien um so mehr nähern werden, je schiefer die Platte zur Axe der Linse gestellt wird.

Um die Abhängigkeit des Abstandes zweier Ringe von der Grösse des Distanzwinkels kennen zu lernen, müssen wir eine Gleichung herzustellen suchen, in welcher die beiden Grössen, deren Beziehung wir wissen wollen, als einzige Variable vorkommen. Es gilt nun nach dem früheren, wenn wir mit de den Zuwachs des Winkels e bezeichnen, während Δ um $\frac{1}{2}\lambda$ abnimmt, für die Distanzwinkel zweier benachbarter Ringe:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 e}$$

$$\text{und } \Delta - \frac{\lambda}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2(e + de)};$$

wo de der Winkelabstand derjenigen Ringe ist, deren Distanzwinkel e und $e + de$ sind. Durch Subtraction beider Gleichungen erhalten wir die verlangte Gleichung:

$$-\frac{\lambda}{2} = 2d(\sqrt{n^2 - \sin^2(e + de)} - \sqrt{n^2 - \sin^2 e}),$$

welche in der That uns gestattet, de durch e auszudrücken, und in der nur noch n , d und λ vorkommen, welche für jede Platte constant sind. Dazu nehmen wir an, es sei de so klein, dass $\sin de = de$, $\cos de = 1$ und infolge dessen $\sin^2(e + de) = \sin^2 e + de \sin 2e$ gesetzt werden kann. Es kann dann der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite unserer Gleichung nach aufsteigenden Potenzen von de entwickelt werden, von denen alle zweiten höheren Potenzen gegen die erste zu vernachlässigen sind. Dadurch wird die Gleichung:

$$-\frac{\lambda}{4d} = \sqrt{n^2 - \sin^2 e} - \frac{1}{2} \frac{de \sin 2e}{\sqrt{n^2 - \sin^2 e}} - \sqrt{n^2 - \sin^2 e},$$

und wir erhalten für de :

$$(7) \quad de = \frac{\lambda \sqrt{n^2 - \sin^2 e}}{2d \cdot \sin 2e}.$$

In Worten lautet demnach unser Resultat: Der Winkelabstand zweier Ringe verhält sich umgekehrt wie die Dicke

der Platte, direkt wie die Wellenlänge des angewendeten Lichtes und ist bei einer bestimmten Platte proportional der Grösse:

$$f(e) = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 e}}{\sin 2e}.$$

Letzteres ist es, was wir kennen lernen wollten; discutiren wir darum den Werth von $f(e)$ genauer. Derselbe ist stets grösser als Null für alle vorkommenden Werthe von e und wird unendlich, sowohl wenn $e = 0$, als wenn $e = \pi/2$ wird. Für diese Grenzwerte wird demnach unsere Gleichung illusorisch, und wir schliessen daraus, dass die über den Winkelabstand de gemachten Voraussetzungen bei sehr kleinen und sehr grossen Einfallswinkeln nicht zutreffen. Bei den folgenden Betrachtungen mögen daher diese Werthe von e ausgeschlossen sein. Da $f(e)$ sich stetig ändert mit e , so muss es für einen zwischen 0 und $\pi/2$ gelegenen Werth von e ein Minimum sein; wir finden diesen Winkel mittelst des nach e genommenen Differentialquotienten von $f(e)$. Ist derselbe:

$$f'(e) = \frac{-(n^2 - 2n^2 \sin^2 e + \sin^4 e)}{\sin^2 2e \sqrt{n^2 - \sin^2 e}},$$

dann ist der dieser gleich Null gesetzten Grösse genügende Werth von e (wir wollen denselben mit e_m bezeichnen) derjenige, welcher $f(e)$ zu einem Minimum macht. Da $e = 0$ und $e = \pi/2$ ausgeschlossen sind, wird obiger Differentialquotient nur dann Null, wenn der Zähler desselben verschwindet; es muss e_m demnach aus der folgenden Gleichung berechnet werden:

$$\begin{aligned} n^2 - 2n^2 \sin^2 e_m + \sin^4 e_m &= 0, \\ n^2(1 + \operatorname{tg}^2 e_m)^2 - 2n^2 \operatorname{tg}^2 e_m + \operatorname{tg}^4 e_m &= 0, \end{aligned}$$

woraus folgt: $\operatorname{tg}^4 e_m = \frac{n^2}{n^2 - 1}.$

Dass $f(e)$ für e_m ein Minimum wird, geht auch daraus hervor, dass $f'(e)$ für wachsende Werthe seines Argumentes aus dem Negativen durch Null zum Positiven geht. Für unser Beispiel ergibt sich aus obiger Gleichung: $e_m = 58^\circ 57' 57''$; also beim Ringe m , dessen Distanzwinkel nahe 50° beträgt; ist der Winkelabstand zweier Ringe am kleinsten. Ehe wir die Formel (7), aus welcher dieses Resultat abgeleitet

worden ist, experimentell prüfen, wollen wir den senkrechten Abstand berechnen, um welchen die Strahlen eines Strahlenpaares voneinander absteigen, insofern dessen Werth im engsten Zusammenhange mit de steht. Wie aus Fig. 1 ersichtlich, ist derselbe, wenn das von C gefällte Loth den bei A reflectirten Strahl in D trifft:

$$DC = AC \cos e = 2d \operatorname{tg} b \cos e,$$

demnach:
$$DC = \frac{d \sin 2e}{\sqrt{n^2 - \sin^2 e}},$$

woraus folgt, dass DC ein Maximum, wenn de ein Minimum ist, und umgekehrt.

Mittelst Gleichung (7) können wir nun de berechnen, wenn uns n , λ , d und e gegeben ist; es ist dann der für einen Winkel e_i berechnete Werth von de der Winkelabstand des i . und $i+1$. Ringes. Letzteren können wir aber direct durch Subtraction der beobachteten Distanzwinkel e_i und e_{i+1} finden und somit den berechneten Winkel e controliren. Die Berechnung von de für verschiedene Winkel e lehrt, dass sich der Winkelabstand von Ring zu Ring kaum merklich ändert, sodass nur dann von einer Controle zwischen den berechneten und beobachteten Werthen gesprochen werden kann, wenn letztere bis auf Secunden genau gemessen werden können. Diese Bedingung ist bei oben angegebener Beobachtungsmethode nicht erfüllt; wie schon erwähnt, erlaubte das benutzte Spectrometer die Winkel nur bis auf 10'' genau abzulesen; jeder gemessene Distanzwinkel kann daher mit einem Fehler von 10'', und demnach die Differenz zweier solcher, d. h. de , im schlimmsten Falle mit einem Fehler von 20'' behaftet sein. Um diesen Einfluss der Ablesungsfehler möglichst zu eliminiren, benutzen wir die oben erwähnte That-
sache, dass sich de sehr wenig mit e ändert, und betrachten an jeder Stelle des Ringsystems eine Anzahl (ν) benachbarter Ringe als äquidistant, wodurch wir für de , den Winkelabstand in der Nähe des Ringes i , die Gleichung erhalten:

$$de = \frac{e_{i+\nu} - e_i}{\nu}.$$

Darin darf aber ν nicht beliebig gross genommen werden; auch reducirt sich ja der Ablesungsfehler schon bis

auf 1'', wenn erst $\nu = 20$ ist, sodass es gar nicht nöthig ist, ν grösser zu nehmen als 20. Die so durch Messung gefundenen Werthe von de sind in nachfolgender Tabelle nebeneinandergestellt mit den jedesmal für e_i und $e_{i+\nu}$ berechneten Werthen. Die Differenzen stehen in der vierten Verticalreihe, während in der letzten Columnne die gemäss Formel (8) berechneten senkrechten Abstände DC angegeben sind; auch ist der Werth für $2de$, also der Winkelabstand zweier Minima hingeschrieben; ausgeführt wurden die Messungen an einer Platte, deren Brechungsexponent $n = 1,53$, und deren Dicke $d = 4,52$ mm gefunden war.

Tabelle III.

 $n = 1,53$; $d = 4,52$.

Distanzwinkel	beob.	ber.	Differenz	I. Abst. DC.
$e_i = 2^\circ 51' 30''$	6' 50''	6' 53''	+ 3,0''	0,294
$e_{i+6} = 3 \ 12 \ -$		6 \ 8	-42,0	0,329
$e_i = 7^\circ 3' 30''$	2' 44''	2' 48''	+ 4,0''	0,7229
$e_{i+20} = 7 \ 30 \ 50$		2 \ 38	- 6,0	0,768
$e_i = 11^\circ 42' -''$	1' 42''	1' 42,6''	+ 0,6''	1,194
$e_{i+10} = 11 \ 50 \ 30$		1 \ 41,5	- 0,5	1,197
$e_i = 12^\circ 31' 40''$	1' 36''	1' 36,12''	+ 0,12''	1,264
$e_{i+20} = 12 \ 47 \ 40$		1 \ 34,2	- 1,8	1,291
$e_i = 13^\circ 4' 50''$	1' 34''	1' 32,2''	- 1,8''	1,317
$e_{i+20} = 30 \ 20' \ 30$		1 \ 30,5	- 1,5	1,342
$e_i = 74^\circ 12' 10''$	1' 1''	1' 1,6''	+ 0,6''	1,975
$e_{i+20} = 74 \ 22 \ 20$		1 \ 1,02	+ 0,02	1,991
$e_i = 76^\circ 15' 40''$	1' 10''	1' 8,81''	- 1,19''	1,765
$e_{i+22} = 76 \ 28 \ 30$		1 \ 9,8	- 0,2	1,741
$e_i = 81^\circ 49' 40''$	1' 54''	1' 51,6''	- 2,4''	1,089
$e_{i+20} = 82 \ 8 \ 40$		1 \ 55,7	+ 1,7	1,05

Aus der Vergleichung der für den i . und $i + \nu$. Ring berechneten Distanzwinkel, welche in der dritten Reihe stehen, folgt, dass die Annahme der Aequidistanz einer gewissen Anzahl benachbarter Ringe erlaubt ist bei denjenigen Kreisen, deren Distanzwinkel weder sehr klein noch sehr gross sind.

Die beobachteten Winkelabstände sind demnach bis auf $1/\nu$ des grösstmöglichen Ablesungsfehlers als richtig zu betrachten, und somit zeugen die hingeschriebenen Differenzen genügend für die Uebereinstimmung der Theorie mit der Beobachtung. Auch lässt die Tabelle die zwischen dem Winkelabstand, dem senkrechten Abstand der interferirenden Strahlen und dem Distanzwinkel bestehenden Relationen als in der That vorhanden erkennen.

Zur Berechnung des Winkelabstandes mussten die Grössen n , λ und d benutzt werden, von denen vor allem n für planparallele Platten nur schwierig und wenig genau bestimmt werden kann. Während aber dort ein Fehler dieser Grössen das Endresultat nur wenig beeinflusst, macht sich ein solcher bedeutend bemerkbar bei Berechnung der Orte der neutralen Stellen, von denen im Folgenden gehandelt werden soll.

Gemäss der in der Einleitung erwähnten Eigenschaft des Natriumlichtes müssen sich die beiden den Natriumlinien zukommenden Streifensysteme auslöschen, wenn der Gangunterschied der interferirenden Strahlen gleich einem ungeraden Vielfachen von 982 halben Wellenlängen ist. Danach müssen also alle diejenigen Ringe nebst ihrer nächsten Umgebung unsichtbar sein, deren Ordnungszahl (i) der folgenden Gleichung genügt: $q - i = p \cdot 982$,
wo $q = 4nd/\lambda$ und p eine ungerade ganze Zahl ist, die wir mittelst q finden.

Für unsere Platte ist:

$$q = 46964 = 982 \cdot 47,8,$$

also beinahe gleich einem geraden Vielfachen von 982, woraus folgt, dass die Erscheinung bei senkrechter Incidenz sehr deutlich auftreten muss, wie es in der That der Fall ist. Ferner erkennen wir aus dem Werthe von q , dass in der obenstehenden Gleichung für die Ordnungszahlen der verschwindenden Ringe $p = 47, 45$ u. s. w. zu setzen ist; es ergeben sich dann die Werthe $i = 810, 810 + 2 \cdot 982$ u. s. w., deren zugehörige Distanzwinkel wir berechnen müssen, um unser Resultat mit der Beobachtung vergleichen zu können. Dabei ist zu bedenken, dass die zu diesem Zweck abgeleitete Formel:

$$\sin^2 e_i = \frac{n\lambda}{2d} i$$

nur dann anwendbar ist, wenn i so klein, dass das vernachlässigte Glied $i^2 \lambda^2 / 16 d^2$ das Resultat nicht merklich beeinflusst. Wie wir sehen werden, reicht für unsere jetzigen Betrachtungen eine Bestimmung der Distanzwinkel der „neutralen Stellen“ bis auf einige Minuten genau vollkommen aus, und dürfen wir aus diesem Grunde auch noch für $i = 810$ und noch um Hunderte grössere Werthe von i obige einfachere Gleichung benutzen. Wir erhalten dann, indem wir einmal für $n\lambda/2d$ den nach Formel (3) gefundenen Werth 0,000 104 9, das andere mal den aus n , λ und d berechneten Werth 0,000 996 8 setzen, für den Distanzwinkel der ersten neutralen Stelle bezüglich $16^\circ 30'$ und $16^\circ 9'$; es ändern sich diese Winkel nur um einige Minuten, wenn wir das aus i und d zu berechnende Glied zweiter Ordnung berücksichtigen und damit die Formel (α) zu ihrer Berechnung benutzen. Letztere Formel (α) müssen wir aber anwenden, um die Distanzwinkel der übrigen neutralen Stellen auszurechnen, wobei bemerkt sei, dass dann stets für $n\lambda/2d$ der durch Beobachtung gefundene Werth 0,000 104 9 gebraucht werde. Die so erhaltenen Distanzwinkel stimmen nun ganz und gar nicht mit den durch directe Einstellung des Fernrohrs auf die neutralen Stellen des im reflectirten Lichte erzeugten Ringsystemes erhaltenen Werthen überein. Freilich können auch letztere nur innerhalb gewisser Grenzen bestimmt werden¹⁾; aber dennoch ergaben die verschiedensten und voneinander unabhängigsten Einstellungen Winkel, deren Differenz $\frac{1}{2}^\circ$ niemals überschritt und oft nur innerhalb $10'$ schwankte, sodass die dadurch entstehenden Fehler bei weitem nicht im Stande sind, den Unterschied zwischen den berechneten und beobachteten Distanzwinkeln zu erklären. Denn abgesehen davon, dass der Distanzwinkel der ersten neutralen Stelle zu $21^\circ 30'$ beobachtet war, stimmt nicht einmal die Anzahl der neutralen Stellen in beiden Fällen miteinander überein. Es folgt daraus evident, dass die be-

1) Es folgt dies daraus, dass jede neutrale Stelle durch das Verschwinden einer beträchtlichen Anzahl Ringe entsteht.

rechnete Zahl $i = 810$ und damit überhaupt q falsch sein muss. Eigentlich kann dies nicht Wunder nehmen, wenn man bedenkt, dass sich q um 306 Einheiten ändert, wenn n nur um eine Einheit in der zweiten Decimale ab- oder zunimmt. Das unsere Vermuthung in der That richtig, beweist die folgende Betrachtung. Gesetzt den Fall, der beobachtete Werth $21^\circ 30'$ entspräche wirklich der ersten neutralen Stelle; dann kommt diesem Winkel nach Formel (1) die Zahl $i = 1310$ zu, und wir finden, da die diesen Ring bildenden Strahlen um 47.982 halben Wellenlängen gegeneinander verzögert sein müssen, für q den Werth:

$$47.982 + 1310 = 47464 = 982.48,3;$$

auch diese Zahl sagt aus, dass bei senkrechter Incidenz die Ringe sehr deutlich auftreten müssen. Jetzt aber sind die Ordnungszahlen der unsichtbaren Ringe:

$$i = 1310, 1310 + 2.982 \text{ u. s. w.}$$

Wie die folgende Tabelle zeigt, stimmen in der That die für diese i nach Formel (α) berechneten Winkel der neutralen Stellen nahe mit den beobachteten überein, für welche der mittlere aus verschiedenen Einstellungen erhaltene Werth angegeben ist.

Tabelle IV.

i	ber.	beob.	i	ber.	beob.
1310	$21^\circ 20'$	$21^\circ 30'$	7262	$55^\circ 45'$	$55^\circ 19'$
3274	34 14	34 29	9106	67 14	66 56
5238	45 27	45 25	11130	imaginär	—

Der Unterschied von $10'$ zwischen den Winkeln der ersten neutralen Stelle erklärt sich daraus, dass aus dem beobachteten Distanzwinkel erst i mittelst der abgekürzten Formel (1), und dann rückwärts für dieses i der angegebene Winkel mittelst der Gleichung (α) berechnet worden ist. Daraus, dass fünf neutrale Stellen und mehr denn 9166 Ringe auftreten, folgt, dass jede planparallele Glasplatte die von uns beschriebene Interferenzerscheinung zeigen muss, wenn nicht bei senkrechter, so sicher bei schräger Incidenz der Strahlen. Eine solche Platte wird dann freilich nur mehr oder weniger geradlinige Streifen, nie aber Ringe zeigen

können. Ist die Dicke der Platte so klein geworden, dass dem Centrum der Ringe ein Gangunterschied von weniger denn 982 halben Wellenlängen entspricht, so können keine neutralen Stellen mehr auftreten, da in diesem Fall nothwendig weniger als 982 Ringe vorhanden sein müssen. Wie daraus hervorgeht, und noch besser die für den Winkelabstand aufgestellte Gleichung (7) erkennen lässt, ist mit der Abnahme der Anzahl der Ringe ein Wachsen des Winkelabstandes zweier Ringe verbunden. Ist demnach die Plattendicke so klein geworden, dass bei senkrechter Stellung der Platte zur optischen Axe des Auges in dieses nur die das Centrum¹⁾ bildenden Strahlen gelangen, dann erscheint die Platte unter einer lediglich von der Dicke der Platte abhängenden gleichmässigen Helligkeit. Für $d = 0,002$, $n = 1,53$ und $\lambda = 0,000\,589$ mm wird $e_1 = 28^\circ 21'$, $e_2 = 42^\circ 10'$, $e_3 = 55^\circ 18'$ und $e_4 = 71^\circ 41'$; es treten also nur zwei Minima auf, woraus folgt, dass, unter welcher Richtung man auch Licht von der Platte reflectiren lässt, man letztere stets gleichmässig erleuchtet sehen wird. Für noch dünnere Plättchen aber geht bei Anwendung gemischten Lichtes die gleichmässige Helligkeit in eine gleichmässige Färbung über, welche bei senkrechter Incidenz der Strahlen dem Centrum des Ringsystems entspricht und nur von der Dicke des Plättchens abhängt. Abgesehen von der Beobachtungsweise führt nun auch die Theorie der „Curven gleicher Dicke“ in diesem speciellen Falle auf ganz dasselbe Resultat. Es möge mir gestattet sein, einiges über die Theorie der „Curven gleicher Dicke“ zu sagen, zumal wir dabei Gelegenheit finden werden, die Gültigkeit des aus dem erwähnten Versuch Fizeau's abgeleiteten Schlusses über die Natur der Aetherschwingung zu prüfen, als auch den Unterschied kennen zu lernen, welcher zwischen den „Curven gleicher Dicke“ und den von uns mitgetheilten „Interferenzen an planparallelen Platten“ besteht.

Es ist durch das Experiment constatirt, dass die z. B. an einer wenig planparallelen Glasplatte erzeugten „Interferenzcurven gleicher Dicke“ um so schärfer auftreten, je

1) Es sei hier darunter der nullte Ring verstanden.

mehr das Auge auf die ihm zugewendete Fläche der Platte eingestellt ist. Daraus ergibt sich von selbst der Verlauf der zur Erscheinung beitragenden Strahlen. Es sei PP_1 (Fig. 3) die benutzte Glasplatte, auf deren Oberflächenpunkt c das Auge A accommodirt ist. Die vom leuchtenden Punkt S kommenden Strahlen Sc und $Sabc$ werden dann durch die Linse des Auges gerade in dem Bildpunkt von c vereinigt; derselbe sei d . Da die optische Länge aller von c nach d gehenden Strahlen einander gleich ist, so hängt der Gangunterschied der Strahlen Scd und $Sabced$ nur ab von der Grösse $Sa + 2nab - Sc$, wenn n der Brechungsexponent der Platte ist; bei senkrechter Incidenz der Lichtstrahlen also lediglich von der Dicke (d) des Glases bei c , da in diesem Falle: $Sa = Sc$ und $ab = d$ wird. Wenn nun statt S mehrere leuchtende Punkte vorhanden, so sendet jeder derselben zwei Strahlen aus, welche sich in c und, falls sie beide nach der Pupille gelangen, auch in d schneiden. Wie Verdet¹⁾, dem wir bei dieser Betrachtung gefolgt sind, gezeigt, ist aber bei geringer Dicke der Platte die Phasendifferenz aller dieser nach d kommenden Strahlenpaare dieselbe und es verstärken sich die Wirkungen der einzelnen Strahlenpaare daselbst. Dies hört auf, wenn den Normalstrahlen, d. h. den Strahlen des normal zur Platte verlaufenden Strahlenpaares ein Gangunterschied von vielen Tausenden Wellenlängen zukommt. So berechnet sich gemäss der von Verdet abgeleiteten Formel die grösste Differenz (δ) der Gangunterschiede aller zugleich nach d kommenden Strahlenpaare zu 0,936 Wellenlänge, vorausgesetzt, dass die Normalstrahlen um 52000 Wellenlängen gegeneinander verzögert sind, das Auge um 250 mm von der Platte entfernt, und der Radius der Pupille 1,5 mm gross ist. Bei der Annahme dieser Grössenverhältnisse kommen also nach einem Punkt der Netzhaut Strahlenpaare von allen möglichen zwischen 0 und 0,936 Wellenlängen liegenden Gangunterschieden; während so die Hälfte der Strahlenpaare Helligkeit hervorruft, bringt die andere Hälfte daselbst Dunkelheit hervor. Dies findet in allen Punkten

1) Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes von E. Verdet. Deutsche Bearbeitung von Dr. Karl Exner 1881. 1. p. 72 ff.

der Erscheinung statt; das Interferenzphänomen muss also nahezu verschwinden. Diesem Resultate gemäss müssen also die Interferenzen gleicher Dicke bei hohen Gangunterschieden undeutlich und schliesslich ganz unsichtbar werden, selbst wenn ein Aethertheilchen im Stande sein sollte, unaufhörlich gleichmässig zu schwingen.

Die Grenze des Verlöschens der Streifen hängt nun ab von der Entfernung des Auges und der Grösse der Pupille, welcher letztere wiederum je nach der Intensität der angewandten Natriumflamme variirt. Es kann also nicht überraschen, wenn Fizeau in der früher citirten Abhandlung sagt, dass er bei einem Gangunterschiede von 52205 Wellenlängen an einer Platte von 10,058 mm Dicke noch „des franges bien saisissables et permanentes, quoique déjà assez pâles“ erhalten, ja sogar bei einem über 12 mm dicken Glase momentweise noch Interferenzen gesehen habe, sodass in letzterem Falle also Strahlen mit über 60000 Wellenlängen Phasendifferenz interferirten. Lassen uns somit diese Versuche im Unklaren, ob und wann ein Aethertheilchen aufhört, gleichmässig zu schwingen, so scheint mir auch der im Anfang erwähnte von Fizeau am Newton'schen Farbenglase angestellte Versuch nicht geeignet, diese Frage mit absoluter Bestimmtheit und endgültig zu entscheiden. Bekanntlich gehören auch die Newton'schen Farbenringe zu der Classe der „Curven gleicher Dicke“, insofern sie ihr Entstehen der zwischen einer Planplatte und einer schwachgekrümmten Convexlinse eingeschlossenen Luftschicht verdanken. Ueberall da, wo die Dicke der Luftschicht dieselbe, ist auch die Intensität der interferirenden Strahlen dieselbe, sodass concentrische Ringe um den Berührungspunkt von Linse und Platte entstehen müssen. Es werden jedenfalls auch hier bei Anwendung einer Natriumflamme in jedem Punkte der Erscheinung unzählige Strahlenpaare zusammentreffen, deren Gangunterschiede um so mehr voneinander abweichen, je dicker die Luftschicht ist. War letztere gegen 15 mm dick, sodass einem Strahlenpaare eine Phasendifferenz von mehr denn 50000 Wellenlängen zukam, so konnte Fizeau keine Ringe mehr wahrnehmen. Während er also an einer Platte

noch deutliche Interferenzen bei Gangunterschieden von 52000 und sogar von 60000 Wellenlängen erhielt, trat das Verlöschen der Ringe beim Newton'schen Glase beträchtlich früher ein. Es lässt sich also auch hier schwer entscheiden, welcher Umstand das Ausbleiben der Ringe bewirkt, noch weniger aber daraus ein definitives Urtheil darüber fällen, wie lange die Schwingungsweise eines Aethertheilchens sich constant erhält.

Diese Frage endgültig zu entscheiden, ist den „Interferenzen an planparallelen Platten“ vorbehalten. Aus der Theorie derselben geht hervor, dass die Ringe bei jeder beliebigen Dicke der Platte und um so deutlicher auftreten müssen, je grösser die Pupille des Auges ist. Schwingt demnach, wie freilich wahrscheinlich ist, ein Aethertheilchen wirklich nur während einer gewissen Zeitdauer ganz gleichmässig, dann dürfen planparallele Platten von einer bestimmten Dicke (d) nur bei sehr schräger Incidenz der Strahlen, Platten von grösserer Dicke aber überhaupt keine Interferenzstreifen zeigen, unter welchem Winkel das Licht auf dieselben auch auffallen möge. Wie leicht zu berechnen, beträgt z. B. bei einer 12 mm dicken Platte vom Brechungsindex 1,5 die Phasendifferenz der Normalstrahlen über 62000 Wellenlängen, während ein nahe unter 90° auf die Platte fallender Strahl sich in zwei Strahlen zerlegt, welche nur um ungefähr 47000 Wellenlängen gegeneinander verzögert sind. Das heisst, es treten ca. 15000 dunkle Ringe auf, so dass bei Beobachtung mittelst Fernrohrs 15000 Minima am Fadenkreuzschnittpunkt vorbeiwandern, wenn das Fernrohr von der Senkrechtstellung zur Platte langsam um 90° gedreht wird. Ändert sich aber der Zustand eines Lichtpartikelchens plötzlich, nachdem ein Lichtstrahl gegen 52000 Wellenlängen zurückgelegt hat, so müssen bei dieser Platte die ersten 10000 Ringe fehlen und nur die letzten 5000 Ringe auftreten. Aus der Dicke (d), dem Brechungsindex (n) der Platte und dem Distanzwinkel desjenigen Ringes, von welchem an die Interferenzen erst auftreten, kann aber leicht der Gangunterschied berechnet werden, bei welchem Strahlen aufhören, miteinander zu interferiren. Leider stan-

den mir passende Platten nicht zur Verfügung, um hier schon Resultate angeben zu können.

Kehren wir zurück zur Theorie der Curven gleicher Dicke, lassen aber die störenden Einflüsse unberücksichtigt; in der That dürfen wir dies bei dünneren Platten. Der Gangunterschied in dem Punkte c (Fig. 3) hängt bei senkrechter Incidenz der Strahlen nur ab von der Dicke der Platte bei c ; ist die Dicke an verschiedenen Stellen verschieden, so erscheint auch die Platte ungleichmässig erleuchtet. Ueberall da aber, wo die Plattendicke dieselbe, ist auch die Intensität die nämliche. Es entstehen so die Interferenzcurven gleicher Dicke, deren Gestalt uns ein genaues Bild von der Vertheilung der Dicke gibt, und deren Anzahl erkennen lässt, in welchem Maasse sich die Dicke der Platte von Ort zu Ort ändert. Je gedrängter die Streifen aufeinander folgen, um so weniger eben und parallel sind also die Flächen der Platte; je mehr letztere Bedingung aber erfüllt, um so verschwommener und undeutlicher werden die Streifen. Unendlich dünne, planparallele Plättchen müssen also, da die Dicke an allen Stellen dieselbe, unter gleichmässiger Färbung erscheinen, die lediglich von der Dicke abhängt.

In der Praxis ist es nun wichtig, zu wissen, ob eine Glasplatte planparallel, und in welchem Grade sie es ist. Dies vermögen die Curven gleicher Dicke nicht anzugeben, da eine Platte noch bei weitem nicht planparallele Flächen zu besitzen braucht, wenn dieselbe bei Betrachtung mittelst Lupe auch unter gleichmässiger Helligkeit erscheinen sollte; auch ist es schwer zu entscheiden, ob bei einer solchen Platte denn nun die Helligkeit wirklich eine gleichmässige ist, oder nicht. Wohl aber setzen uns die „Interferenzen an Planparallelgläsern“ in den Stand, auch den geringsten Dickenunterschied einer Platte auf das genaueste zu erkennen und dessen Grösse numerisch zu bestimmen.

Wir entwickelten die Theorie der „Interferenzen an planparallelen Platten“ unter der Voraussetzung, dass die Platte absolut planparallel sei, und fanden die sich daraus ergebenden Resultate in der That an mehreren Platten bestätigt. Daraus könnte man nun leicht geneigt sein, zu schliessen,

dass umgekehrt jede Platte, welche die Ringe zeigt, auch absolut ebene und parallele Flächen besitzen müsse. Wäre dieser Schluss richtig, dann dürften die Ringe gewiss nie entdeckt worden sein; denn schwerlich wird je eine Platte hergestellt werden, welche überall, ja sagen wir nur bis auf ein Zehntel einer Wellenlänge genau die gleiche Dicke hat, geschweige eine absolut planparallele Platte. Wie wir aber sehen werden, ist man auf diesem Gebiete der Technik schon so weit vorgeschritten, dass man wohl mit Recht behaupten kann, man habe das Ziel, welches bei der Herstellung von Planparallelgläsern gesteckt werden kann, schon erreicht — ohne es zu wissen. Man arbeitete bislang, ohne sich dessen bewusst zu sein, wie gut man arbeitete!

Ehe wir dazu übergehen, anzugeben, wie man den Dickenunterschied einer Platte bestimmt, bleibt uns zu beweisen übrig, dass die Ringe auch dann noch entstehen, wenn die Plattendicke innerhalb gewisser Grenzen schwankt. Es ist früher gezeigt worden und aus Fig. 2 ersichtlich, dass, wieviel auch Strahlen in das Auge gelangen mögen, nach jedem Punkte der Erscheinung immer nur ein gewisser, aus parallelen Strahlen bestehender Strahlencomplex kommt, dessen Querschnitt an Grösse höchstens derjenigen der Pupille gleich sein kann. Soll das Phänomen überhaupt auftreten, dann müssen alle einem beliebigen Strahlencomplex angehörigen Strahlenpaare in ihrem gemeinsamen Schnittpunkte auch dieselbe Helligkeit hervorrufen: dies ist der Fall, wenn das von jedem Strahlencomplex durchsetzte Flächenstück als planparallel angesehen werden kann. Wir nehmen an, es variire die Dicke der Platte stetig so von Ort zu Ort, dass die eben ausgesprochene Bedingung erfüllt wird. Die Folge davon ist, dass die Interferenzerscheinung auftreten wird, in welcher Entfernung sich die Platte auch vom Auge befinden möge, dass aber ferner die Gestalt der Ringe je nach der Entfernung der Platte eine andere sein muss. Das erkennen wir so:

Alle denselben Einfallswinkel (e_1) mit dem Lothe der Platte bildenden Strahlencomplexe schneiden sich in den Punkten des Kreises i der Brennebene, dessen Centrum der

Hauptbrennpunkt. Ist nun die Entfernung der Platte so gross, dass die von diesen Strahlencomplexen durchlaufenen Flächenstücke nicht mehr übereinander fallen und somit auch eine voneinander wenig abweichende Dicke haben, dann bringen genannte Strahlencomplexe auch nicht die gleiche Intensität in ihren Schnittpunkten hervor. Es weicht also die Gestalt der Curven gleicher Intensität von der Kreisform ab, und zwar ist, wie man leicht erkennt, diese Abweichung um so grösser, je entfernter die Platte vom Auge, und bedeutender bei Ringen höherer Ordnungszahl. Obgleich sich dadurch also schon das geringste Schwanken der Dicke einer Platte erkennen lässt, müssen wir uns, um den Dickenunterschied einer Platte in bestimmten Zahlen zu erhalten, doch eines anderen Mittels bedienen. Dasselbe ist uns gegeben in der Beobachtung der Intensität des Centrums des an verschiedenen Platten erzeugten Ringsystemes.

Bei einer absolut planparallelen Glasplatte ist es ganz gleichgültig, welches Stück der Platte zur Erzeugung des Phänomens benutzt wird; immer werden die Normalstrahlen um gleichviel gegeneinander verzögert, und demnach die Helligkeit des nullten Ringes stets dieselbe sein. Dies hört auf bei einer Platte von verschiedener Dicke; der Einfachheit wegen möge letztere, natürlich innerhalb der erlaubten Grenzen, von Rand zu Rand beständig zunehmen. Dann muss nothwendigerweise das Centrum des Kreissystemes beim Wandern des letzteren von einer Stelle der Platte zur anderen so oft abwechselnd hell und dunkel erscheinen, als die Plattendicke an jenen beiden Stellen sich um Vielfache von $\lambda/4$ unterscheidet. Die Anzahl (g) der Intensitätswechsel des Centrums können wir leicht dadurch finden, dass wir, im durchgehenden Lichte beobachtend, Auge und Flamme zugleich so bewegen, dass wir immer das Centrum des Ringsystemes sehen; es ist dann $g(\lambda/4)$ mm der Unterschied der Plattendicke für diejenige Strecke, innerhalb deren die Helligkeit der Mitte g mal wechselt. Noch sei darauf hingewiesen, wie man bestimmt, ob eine Platte zwischen zwei Stellen beständig an Dicke zunimmt oder abwechselnd bald dicker, bald dünner ist. Ein vortreffliches Kriterium hierfür folgt

daraus, dass, je nachdem man mit dem Ringsystem von einer dünneren Stelle der Platte zu einer dickeren oder umgekehrt wandert, die Ringe sich nach dem Centrum zusammenziehen oder aus demselben hervorzuziehen scheinen. Dass dieses Kriterium richtig, kann auch durch Erwärmung der Platte erkannt werden. Wird nämlich eine Platte gleichmässig erwärmt, dann wandern die Ringe, deren Gestalt dieselbe bleibt, mit einer der Erwärmung proportionalen Geschwindigkeit nach dem Centrum, um nacheinander in demselben zu verschwinden. Sobald aber die Zufuhr von Wärme aufhört, und die Temperatur der Platte anfängt zu sinken, tritt das umgekehrte Schauspiel ein, und das Centrum wird scheinbar die Quelle einer beträchtlichen Anzahl von Ringen.

Die beiden Platten¹⁾, an denen die mitgetheilten Messungen ausgeführt worden sind, zeigten bei einer Grösse von 18 und 30 qcm zwischen zwei gegenüberliegenden Rändern nur einen zwei-, bezüglich dreimaligen Intensitätswechsel des Ringcentrums; die Dicke derselben in allen Punkten einer senkrecht zu den betreffenden Rändern stehenden Linie unterscheidet sich also höchstens um ungefähr $\frac{3}{10\,000}$, resp. $\frac{4}{10\,000}$ mm. Bei diesen Platten war aber auch die Kreisform der Ringe annähernd bewahrt, selbst wenn die ganze Platte zugleich zur Erscheinung beitrug. Nicht so aber bei einer Platte von 12 qcm Grösse, bei welcher das Centrum des von Rand zu Rand wandernden Ringsystems sechs- bis achtmal wechselte. Während auch sie in der Nähe des Auges reizende kreisförmige Ringe zeigte, so verwandelten sich die Kreise mit der Entfernung der Platte vom Auge immer mehr in elliptisch gestaltete Curven. Dennoch konnte, wie vorauszusehen war, selbst an dieser Platte mittelst Betrachtung einer Lupe nicht eine Spur von Curven gleicher Dicke bemerkt werden.

Auch ist es mir nie gelungen, umgekehrt die Ringe auftreten zu sehen an solchen Platten, welche Curven gleicher Dicke zeigten. Aus alledem geht hervor, dass nur diejeni-

1) Es stammten dieselben aus der optischen Werkstatt von Schmidt und Haensch in Berlin.

gen Glasplatten planparallel genannt werden dürfen, welche die von uns betrachteten Interferenzen zeigen, und aus diesem Grunde ist letzteren der so oft gebrauchte Name „Interferenzringe an planparallelen Glasplatten“ wohl mit Recht beigelegt.

Zusatz. Nach Einsendung dieser Arbeit wurde mir durch die Güte des Hrn. Prof. Abbe kund, dass die in dieser Arbeit behandelten Ringe schon von Hrn. Mascart¹⁾ berechnet und von Haidinger zuerst beobachtet worden seien. — Wenn ich es dennoch unterlassen habe, meine Abhandlung zurückzuziehen, so geschah es vor allem wegen der Verschiedenartigkeit der Mascart'schen und meiner Arbeit sowohl in theoretischer wie in experimenteller Beziehung. Auch erkennt Mascart nicht die Bedeutung der Ringe, welche sie für die Untersuchung der Planparallelität von Planparallelplatten in der optischen Praxis haben.

1) Mascart, *Ann. de chim. et de phys.* 23. p. 116.